ЧИСЛЕНИ МЕТОДИ ЗА КЛАСОВЕ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ ОТ ДРОБЕН РЕД

Юри Митков Димитров

АВТОРЕФЕРАТ
на дисертация

За получаване на образователна и научна степен Доктор

професионално направление 4.5. Математика, докторска програма

"Математическо моделиране и приложение на математиката"

Научен ръководител: **проф. д-р. Любен Вълков**

Русенски университет "Ангел Кънчев"

Април, 2017

Дисертационният труд съдържа 133 страници, увод, четири глави, 12 фигури и 27 таблици. Цитирани са 113 литературни източника. Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита от катедра "Приложна математика и статистика", факултет "Природни науки и образование", Русенски университет "Ангел Кънчев".

Дисертантът е асистент в катедра "Математика и физика", факултет "Горска промишленост", Лесотехнически университет, София.

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в катедра ПМС.

Автор: *Юри Митков Димитров*
Заглавие: *Числени методи за класове диференциални уравнения от дробен ред*

Author: *Yuri Mitkov Dimitrov*
Title: *Numerical methods for classes of differential equations of fractional order (Ph.D. Thesis)*

Печатна база: Университетски издателски център на Русенски университет "Ангел Кънчев".

Цели и задачи на дисертацията

• Извеждане на разширенията от четвърти ред на апроксимацията на Грюнвалд с отместване и L1 апроксимацията на производната на Капуто.

• Извеждане на двуточкови, триточкови и апроксимации от втори ред за производната на Капуто.

• Числено решаване на дробните уравнения на релаксация и дифузия. Построяване на компактна диференчна схема върху неравномерна мрежа за дробното уравнение на Блек-Шолс.

• Доказване на сходимостта на числените методи.

Методи на изследване

Триточковите апроксимации за втората производна и производната на Капуто се извеждат с формула на Тейлър, трансформация на Фурие, развитието в ред (5) и формулата за сума на степени (9). Диференчните схеми за обикновени и частни ДДУ използват получените апроксимации за производната на Капуто и апроксимация с централна разлика за втората производна. Доказателствата за сходимост на числените методи използват оценките за теглата на апроксимацията на Грюнвалд (3), (4) и L1 апроксимацията (18).

Научни приноси

• Построени са числените решения на уравненията на релаксация и дифузия. Приведени са доказателства за сходимост на числените методи. (Глава 2, публикация [69])

• Построена е триточкова компактна диференчна схема върху неравномерна мрежа за дробното уравнение на Блек-Шолс. (Глава 3, [70])

• Изведена е апроксимация от втори ред за производната на Капуто, основана на L1 апроксимацията, с модификация на първите три тегла със стойността на $\zeta(\alpha - 1)$. (Глава 4, публикация [71])

• Изведено е разширението от четвърти ред на L1 апроксимацията за производната на Капуто и триточкова апроксимация от ред $3 - \alpha$. Построени са триточкови диференчни схеми за дробните уравнения на релаксация и дифузия. (Глава 5, публикация [72])

Апробация

Основните резултати на настоящия дисертационен труд са докладвани на семинари в Русенския университет "Ангел Кънчев", Русе и Института по математика и информатика на БАН, София. Резултатите от Глава 3 са докладвани на конференцията

41st International Conference "Applications of Mathematics in Engineering and Economics", Созопол, 8-13 юни, 2015г.

Основните резултати на дисертационният труд са публикувани в статиите [69,70,71,72].

Въведение

Дробното смятане е раздел от математиката, който се занимава с изучаването на производни и интеграли от дробен ред, които са обобщение на целочислените производни и интеграли. Целочислените производни на функция се дефинират с помоща на крайни разлики

$$y^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} y(x + (n-k)h).$$

Приближението на производната от ред n в точката $x - nh/2$ с централна разлика има втори ред на точност.

$$\frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} y(x - kh) = y^{(n)}(x - nh/2) + O\left(h^2\right).$$

Частните случаи $n = 1$ and $n = 2$ се използват за пресмятане на числените решения на обикновени и частни диференциани уравнвния. В литературата по дробно смятане често се приема, че n-кратният интеграл $I^n y(x)$ от функцията y в интервала $[0, x]$ е производна на функцията $y(x)$ от отрицателен ред:

$$y^{(-n)}(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_{n-1}} y(t) dt dx_{n-1} \cdots dx_1 = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1} y(t)}{(n-1)!} dt.$$

Диференциалните уравнения са важно средство за изучаване на процесите в химията, физиката, механиката и имат приложение в почти всеки раздел на науката. Естествен въпрос за разглеждане е обобщението на целочислените производни и диференциалните уравнения до производни и уравнения от произволен ред.

Дробни производни и интеграли

Дробната производна се споменава за пръв път в писмо от Лайбниц до Лопитал от 30.09.1695г. През 18-ти и 19-ти век много от известните учени като Ойлер, Лаплас, Фурие, Абел, Лиувил, Риман, Грюнвалд, Летников, Адамар, Хевисайд допринасят за развитието на дробното смятане. Интересът към дробното смятане се засилва в средата на 20-ти век. Темповете на развитие и популярността, която дробното смятане и дробните диференциални уравнения придобиват през последните две деситилетия, са впечатляващи. Важността на разработването на числени методи от висок ред на точност за решаване на дробни диференциални уравнения произтича от техния потециал за приложения в различни сфери на науката и технологиите [5, 7, 48, 52, 53].

Нека $y(x)$ да е реална функция, която е дефинирана за $x \geq b$. Производните на Капуто и Риман-Лиувил от ред $n+\alpha$, където n е естествено число и $0 < \alpha < 1$ се дефинират по следния начин:

$$y^{(n+\alpha)}(x) = D^{n+\alpha}y(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_b^x \frac{y^{(n+1)}(t)}{(x-t)^\alpha} dt,$$

$$D_{RL}^{n+\alpha}y(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \int_b^x \frac{y(t)}{(x-t)^\alpha} dt.$$

Производната на Капуто от константната функция 1 е нула. Производната на Риман-Лиувил от 1 е $(x-b)^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$. Когато $y(x) \in C^{n+1}[b,x]$, произвидните на Риман-Лиувил и Капуто са свързани с равенството

$$D_{RL}^{n+\alpha}y(x) = D^{n+\alpha}y(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{y^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha-n+1)} x^{k-\alpha-n}.$$

Дробните производни на Капуто и Риман-Лиувил на функцията $y(x)$ са равни когато $y^{(k)}(b) = 0$ за $k = 0, 1, \ldots, n$. Когато $(n+1)$-та производна на функцията y е ограничена, производната на Капуто от ред $n+\alpha$ в началната точка $x = b$ е равна на нула: $y^{(n+\alpha)}(b) = 0$. При дефиниране на диференциални уравнения от дробен ред предпочитаме производната на Капуто, понеже има особенност от по-нисък ред в началната точка.

Дробният интеграл на Риман-Лиувил от ред α се дефинира като конволюция на функцията $y(x)$ степенната функция $x^{\alpha-1}$ в интервала $[0,x]$

$$I^\alpha y(x) = y^{(-\alpha)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_b^x (x-t)^{\alpha-1} y(t) dt.$$

Дробният интеграл от ред α от константната функция 1 е $x^\alpha/\Gamma(\alpha+1)$. Производната на Риман-Лиувил и дробният интеграл удовлетворяват равенствата

$$D^\alpha_{RL}x^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)}x^{p-\alpha}, \quad I^\alpha x^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\alpha+1)}x^{p+\alpha}, \qquad p > -1.$$

Производните на Капуто и Риман-Лиувил от ред $n+\alpha$ се изразяват като композиция на дробния интеграл от ред $1-\alpha$ с производната от ред $n+1$

$$D^{n+\alpha}y(x) = I^{1-\alpha}D^{n+1}y(x), \quad D^{n+\alpha}_{RL}y(x) = D^{n+1}I^{1-\alpha}y(x).$$

Композицията на дробни интеграли и дробни производни има следните свойства

$$\begin{array}{ll} I^\alpha I^\beta y(x) = I^\beta I^\alpha y(x) = I^{\alpha+\beta}y(x), & (\alpha > 0, \beta > 0), \\ D^\alpha I^\alpha y(x) = y(x), I^\alpha D^\alpha y(x) = y(x) - y(b), & (0 < \alpha < 1), \\ I^\alpha D^\alpha y(x) = y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{y^{(k)}(b)(x-b)^k}{k!}, & (n-1 < \alpha < n). \end{array}$$

Когато $y \in C^1[b,x]$ производната на Капуто удовлетворява равенството

$$D^\alpha D^{1-\alpha}y(x) = y'(x).$$

Локалните свойства на диференцируема функция се описват с полиномите на Тейлър за функцията. Теоремата за средните стойности има следното обобщение за производната на Капуто [60].

Теорема. *(Обобщена теорема за средните стойности) Нека* $y \in C^\alpha[b,x]$.

$$y(x) = y(b) + \frac{(x-b)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}y^{(\alpha)}(\xi_x) \quad (b \le \xi_x \le x).$$

Композицията на дробни производни не е комутативна. Производната на Милър-Рос за производната на Капуто се дефинира

$$y^{[\alpha_1]}(x) = y^{(\alpha_1)}(x), \quad y^{[\alpha_1+\alpha_2]}(x) = D^{\alpha_1}D^{\alpha_2}y(x),$$

$$y^{[\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n]}(x) = D^{\alpha_1}D^{\alpha_2}\cdots D^{\alpha_n}y(x).$$

Въвеждаме означението

$$y^{[n\alpha]}(x) = y^{[\alpha+\alpha+\cdots+\alpha]}(x) = D^\alpha D^\alpha \cdots D^\alpha y(x).$$

Дробните редове и полиноми на Тейлър за производните на Капуто и Милър-Рос се дефинират [60, 50] по начин сходен на извеждането на редовете и полиномите на Тейлър за целочислени производни. Дробните полиноми на Тейлър от степен m за производната на Милър-Рос в началната точка $y^{[n\alpha]}(b)$ се дефинират така:

$$T_m^{(\alpha)}(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{y^{[n\alpha]}(b)}{\Gamma(\alpha n + 1)} x^{\alpha n}.$$

Производните на Милър-Рос описват функцията в долната граница $x = b$. Във всяка друга точка производните на Капуто и Милър-Рос зависят от стойностите на функцията в интервала $[b, x]$. В Глава 5 на дисертацията се пресмятат дробните полиноми на Тейлър за дробното уравнение на релаксация и частното дробно уравнение на дифузията. Дробните полиноми на Тейлър се използват за подобряване на точността на числените решения. Дробната производна на Грюнвалд-Летников се дефинира с помоща на разлика от ред α:

$$D_{GL}^{\alpha} y(x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \binom{\alpha}{n} y(x - nh),$$

където $N = \lfloor (x-b)/h \rfloor$ и $\binom{\alpha}{n}$ е биномният коефициент

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n+1)} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Апроксимацията на дробната производна с разлика от ред α има първи ред на точност и се нарича апроксимация на Грюнвалд

$$\frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \binom{\alpha}{n} y(x - nh) = y^{(\alpha)}(x) + O(h). \tag{1}$$

Дефинициите на дробни производни на Риман-Лиувил, Капуто и Грюнвалд-Летников са еквивалентни когато функцията $y(x)$ удовлетворява условието $y^{(k)}(b) = 0$ за $k = 0, 1, \cdots, n$. Както при целочислените производни, формулата на Грюнвалд има втори ред на точност за стойността на дробната производна в точката $x - \alpha h/2$. Апрокцимацията на Грюнвалд има генерираща функция

$$(1-x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} x^n = 1 - \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^n - \binom{\alpha}{3} x^3 + \cdots$$

Производните на Риман-Лиувил и Капуто имат естествена особенност в началната точка. Особеността на производната на Риман-Лиувил има по-висок ред от особеността на производната на Капуто. Освен класическите начини за обобщение на целочислените производни резгледани досега, има и много други дефиниции на дробна производна, като производна на Адамар, производна на Уеил, производна на Ердели-Кобер, производна на Риц, производна на Чен, производна на Капуто-Фабрицио, производна на Атангана-Балеану. В настоящата дисертация се разглеждат числени методи за дробни диференциални уравнения съдържащи производната на Капуто.

Специални функции в дробното смятане

Бета, Гама и функциите на Митаг-Лефлер са директно свързани с дефиницията и свойствата на дробните производни. Числата на Бернули, Дзета и полилогаритмичните функции се използват при апроксимации на определени интеграли, дробни интеграли и дробни производни.

• **Гама функцията** се дефинира за $x > 0$ чрез равенството

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Гама функцията има следните свойства

$$\Gamma(0) = 1, \quad \Gamma(n) = (n-1)!, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

• **Бета функцията** се дефинира за $x > 0, y > 0$:

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

Бета функцията се изразява чрез Гама функцията

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

• **Функциите на Митаг-Лефлер** се дефинират за $\alpha > 0$:

$$E_\alpha(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \quad E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}.$$

При $\alpha = \beta = 1$ функцията на Митаг-Лефлер съвпада с експоненциалната функция. Частни случай на функциите на Митаг-Лефлер

$$E_1(-z) = e^{-z}, \quad E_2(-z^2) = \cos z, \quad E_{\frac{1}{2}}(z) = e^{z^2} erfc(-z),$$

където $ercf(z)$ е допълнителната функция на грешката. Функциите на Митаг-Лефлер участват в решенията на диференциални уравнения. Дробното диференциално уравнение

$$y^{(\alpha)}(x) = \lambda y(x), \quad y(0) = 1$$

има решение $y(x) = E_\alpha(\lambda x^\alpha)$. Обикновенното диференциално уравнение

$$y''(x) = y(x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

има решение $y(x) = E_{2,1}(x^2) + xE_{2,2}(x^2) = \cosh x + \sinh x = e^x$. Производната на Капуто и дробният интеграл на фунцциите e^x и $\sin x$ се изразяват с функциите на Митаг-Лефлер така:

$$D^\alpha e^{\lambda x} = \lambda x^{1-\alpha} E_{1,2-\alpha}(\lambda x), \quad I^\alpha e^{\lambda x} = x^\alpha E_{1,1+\alpha}(\lambda x),$$

$$D^\alpha \sin(\lambda x) = \frac{\lambda}{2} x^{1-\alpha} \left(E_{1,2-\alpha}(i\lambda x) + E_{1,2-\alpha}(-i\lambda x) \right),$$

$$I^\alpha \sin(\lambda x) = -\frac{i}{2} x^\alpha \left(E_{1,1+\alpha}(i\lambda x) - E_{1,1+\alpha}(-i\lambda x) \right).$$

• **Дигама функцията** се дефинира като логаритмичната производна на Гама функцията

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

Дигама функцията има следните представяния в ред:

$$\Psi(x+1) = -\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(n+x)},$$

$$\Psi(x+1) = -\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(n+1)(-x)^n, \qquad (|x| < 1),$$

където $\gamma \approx 0.577$ е константата на Ойлер,

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right).$$

• **Дзета функцията на Риман** се дефинира чрез равенствата

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x},\ (Re(x) > 1), \quad \zeta(x) = \frac{1}{1-2^{1-x}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x},\ (Re(x) > 0).$$

Дзета функцията удовлетворява функционалното уравнение

$$\zeta(x) = 2^x\pi^{x-1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\Gamma(1-x)\zeta(1-x).$$

• **Числата на Бернули** $1, \pm 1/2, 1/6, 0, -1/30, 0, \ldots$ се наричат числа на Бернули от първи род когато $B_1 = -1/2$, и числа на Бернули от втори род ако $B_1 = 1/2$. Числата на Бернули с нечетен индекс са равни на нула. Числата на Бернули с четен индекс се изразяват със стойностите на дзета функцията:

$$\frac{B_{2n}}{(2n)!} = (-1)^{n+1}\frac{2\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}}.$$

• **Полилогаритмичната функция** се дефинира чрез равенството

$$Li_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^\alpha}, \qquad (|x| < 1).$$

Полилогаритмичната функция удовлетворява равенствата

$$Li_\alpha(1) = \zeta(\alpha),$$

$$Li_\alpha(x) = \Gamma(1-\alpha)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta(\alpha-n)}{n!}(\ln x)^n, \qquad (|\ln x| < 2\pi)$$

$$Li_\alpha(e^x) = \Gamma(1-\alpha)(-x)^{\alpha-1} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\zeta(\alpha-k)}{k!}x^k, \qquad (|x| < 2\pi). \qquad (2)$$

Апроксимация на Грюнвалд за производната на Капуто

В основния случай, който се разглежда, редът на дробната произвона е между нула и едно. Интерес представляват и дробните производни от ред между едно и две. При $0 < \alpha < 1$ и $b = 0$ производните на Капуто и Риман-Лиувил от ред α се дефинират чрез равенствата

$$y^{(\alpha)}(x) = D^{\alpha}y(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{y'(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt,$$

$$D_{RL}^{\alpha}y(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt.$$

Означаваме с $\Delta_h^{\alpha}y(x)$ и $\Delta_{h,p}^{\alpha}y(x)$ оператора на Грюнвалд и отместения оператор на Грюнвалд с разлики от ред α за функцията $y(x)$:

$$\Delta_h^{\alpha}y(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \binom{\alpha}{n} y(x - nh),$$

$$\Delta_{h,p}^{\alpha}y(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \binom{\alpha}{n} y(x - (n-p)h),$$

където $N = \lfloor x/h \rfloor$ и $h > 0$. Операторът на Грюнвалд е частен случай на отместеният оператор на Грюнвалд с параметър на отместване $p = 0$. Нека $w_n^{(\alpha)} = (-1)^n \binom{\alpha}{n}$ да са теглата на апроксимацията на Грюнвалд. Числата $w_n^{(\alpha)}$ имат следните свойства:

$$w_0^{(\alpha)} > 0, \quad w_1^{(\alpha)} < w_2^{(\alpha)} < \cdots < w_n^{(\alpha)} < \cdots < 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} w_n^{(\alpha)} = 0.$$

В Глава 2 на дисертацията се извеждат следните оценки за теглата на апроксимацията на Грюнвалд:

$$e^{-(\alpha+1)^2\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{5}{4}\right)} \frac{\alpha(1-\alpha)2^{\alpha}}{n^{\alpha+1}} < \left|w_n^{(\alpha)}\right| < \frac{\alpha 2^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}}, \tag{3}$$

$$\frac{1-\alpha}{5}\left(\frac{2}{n}\right)^{\alpha} < \sum_{k=n}^{\infty} \left|w_k^{(\alpha)}\right| < 2\left(\frac{2}{n}\right)^{\alpha}. \tag{4}$$

Оценките за теглата w_n се използват в доказателствата за сходимост на числените решения на дробни диференциални уравнения. Апроксимацията на Грюнвалд с отместване за производната на Капуто има първи ред на точност:

$$y^{(\alpha)}(x) = h^{-\alpha}\Delta^{\alpha}_{h,p}y(x) + O\left(h\right).$$

Горенфло [22] показва, че апроксимацията на Грюнвалд с отместване $h^{-\alpha}\Delta^{\alpha}_{h,\alpha/2}y(x)$ за дробната производна на Капуто има втори ред на точност когато преходът на функцията $y(x)$ към нула в левия край на интервала на дробно диференциране е достатъчно гладък:

$$y^{\alpha}(x) = h^{-\alpha}\Delta^{\alpha}_{h,\alpha/2}y(x) + O\left(h^2\right).$$

Условието за гладкост включва изискването $y(0) = 0$. Апроксимацията за производната на Капуто $h^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} w_n^{(\alpha)} y_{n-k}$ има генерираща функция $\sum_{n=0}^{\infty} w_n^{(\alpha)} x^k$. Генериращата функция на апроксимация за дробна производна е свързана с трансформацията на Фурие за апроксимацията. Апроксимацията на Грюнвалд и апроксимацията на Грюнвалд с отместване имат генериращи функции $(1-x)^{\alpha}$ и $x^p(1-x)^{\alpha}$. Експоненциалната трансформация на Фурие се дефинира чрез

$$\mathcal{F}[y(x)](\omega) = \hat{y}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} y(x)dx.$$

Степенната функция $y(x) = x^{\alpha-1}$ има трансформация на Фурие $\hat{y}(w) = \Gamma(\alpha)(-i\omega)^{\alpha}$. Производната на функцията y от ред n има трансформация на Фурие

$$\mathcal{F}[y^{(n)}(x)](\omega) = (-i\omega)^n \hat{y}.$$

Трансформацията на Фурие има следните свойства:

$$\mathcal{F}[y(x-a)](w) = e^{i\omega a}\hat{y}(w), \quad \mathcal{F}[y(x) * z(x)](\omega) = \hat{y}(\omega)\hat{z}(\omega).$$

Производната на Капуто и дробният интеграл се дефинират като конволюция на степенната функция и производните на функцията y:

$$\mathcal{F}[D^{\alpha}y(x)](\omega) = (-i\omega)^{\alpha}\hat{y}(\omega), \quad \mathcal{F}[I^{\alpha}y(x)](w) = (-i\omega)^{-\alpha}\hat{y}(\omega).$$

Важен метод за конструиране на апроксимации на дробни производни и интеграли се базира на трансформацията на Фурие за апроксимацията и прилагане на обратната трансформация на Фурие на развитието в

степеннен ред. Този метод се използва за пръв път от Любич [29] през 1986 за конструиране на апроксимации за дробни производни от висок ред. Статии, в които се използва трансформацията на Фурие за конструиране на апроксимации на дробни производни, са [17, 24, 57, 59]. Следната теорема [24] използва трансформацията на Фурие за извеждане на разширението на апроксимацията на Грюнвалд с отместване за дробни производни.

Теорема. *Нека α и p са положителни числа, и $y \in C^{[\alpha]+n+2}(\mathbb{R})$, като всички производни на y до ред $[\alpha]+n+2$ принадлежат на класа $L^1(\mathbb{R})$. Тогава, ако $b=-\infty$, съществуват константи c_l, независими от h, y, x такива, че*

$$h^{-\alpha}\Delta_{h,p}^{\alpha}y(x) = D_{RL}^{\alpha}y(x) + \sum_{l=1}^{n-1} c_l h^l D_{RL}^{\alpha+l}y(x) + O(h^n).$$

Числата c_l са коефициентите от развитието в ред на функцията

$$\omega_{\alpha,p}(z) = \left(\frac{1-e^{-z}}{z}\right)^{\alpha} e^{pz}. \tag{5}$$

Апроксимацията на Грюнвалд за производната на Капуто има разширение от четвърти ред

$$\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{N}\omega_k^{(\alpha)}y(x-kh) = y^{(\alpha)}(x) - \frac{\alpha}{2}y^{(1+\alpha)}(x)h + \frac{\alpha(1+3\alpha)}{24}y^{(2+\alpha)}(x)h^2 + \frac{\alpha^2(1+\alpha)}{48}y^{(3+\alpha)}(x)h^3 + O\left(h^4\right), \tag{6}$$

когато функцията y удовлетворява условието $y^{(k)}(0)=0$ за $k=0,1,2,3$. Двуточковите и триточковите апроксимации за целочислените производни се използват за конструиране на компактни диференчни схеми от висок ред за численно решаване на диференциални уравнения. В Глава 2 използваме разширението от четвърти ред (6) за извеждане на двуточкова (7) и триточкова (8) апроксимации на Грюнвалд за производната на Капуто:

$$\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{n}\omega_k^{(\alpha)}y_{n-k} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)y_{n-1}^{(\alpha)} + \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)y_n^{(\alpha)} + O\left(h^2\right), \tag{7}$$

$$\frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{n}\omega_k^{(\alpha)}y_{n-k} = \left(\frac{\alpha^2}{8}-\frac{5\alpha}{24}\right)y_{n-2}^{(\alpha)} + \left(\frac{11\alpha}{12}-\frac{\alpha^2}{4}\right)y_{n-1}^{(\alpha)} + \left(1-\frac{17\alpha}{24}+\frac{\alpha^2}{8}\right)y_n^{(\alpha)} + O\left(h^3\right). \tag{8}$$

Квадратурна формула на трапеците и формула на Ойлер-Макларън

Формулата на Ойлер-Макларън е важна формула в числените методи. Тя е открита независимо и почти по едно и също време от Ойлер и Макларън около 1735, като остатъчният член е въведен от С. Поасон.

Квадратурна формула на трапеците

Формулата на Ойлер-Макларън дава разширението от m-ти ред за квадратурната формула на трапеците. Нека y е диференцируема функция в интервала $[0,x]$. Разглеждаме равномерна мрежа със стъпка h, където $x = nh$ и n е естествено число. Означаваме с $\mathcal{T}_h[y]$ сумата от лицата на трапеците за функцията $y(t)$ в интервала $[0,x]$:

$$\mathcal{T}_h[y] = h\left(\frac{y(0)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}y(kh)+\frac{y(x)}{2}\right).$$

Квадратурната формула на трапеците има втори ред на точност когато функцията y е двукратно гладка

$$\mathcal{T}_h[y] = \int_0^x y(t)dt + O\left(h^2\right).$$

Когато $y \in C^m[0,x]$, квадратурната формула на трапеците има разширение от ред m и формулата за остатъчния член

$$\int_0^x y(t)dt = \mathcal{T}_h[y] - \sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(y^{(2k-1)}(x)-y^{(2k-1)}(0)\right)h^{2k} + R_{2m}(h)h^{2m}.$$

Коефициентът $R_{2m}(h)$ на остатъчния член удовлетворява равенството

$$R_{2m}(h) = \frac{1}{(2m)!}\int_0^x \tilde{B}_{2m}(-t/h)y^{(2m)}(t)dt,$$

където $B_n(x)$ е полиномът на Бернули

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} x^k = B_0 x^n + n B_1 x^{n-1} + \cdots + B_n,$$

и $\tilde{B}_n(x) = B_n(\{x\}) = B_n(x - \lfloor x \rfloor)$ е функцията на Бернули с период единица. Когато m е естествено число, сумата на m-тите степени на първите n числа се дава от формулата на Фаулхабер

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m+1}{k} B_k n^{m-k+1}.$$

Формулата на Ойлер-Макларън се използва за намиране на разширенията на хармоничните числа и формулата за сумата от степените на първите $n-1$ числа.

$$H_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma - \frac{1}{2n} - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{2m} \frac{1}{n^{2m}}.$$

Сумата от степените на първите $n-1$ числа има разширение

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^\alpha = \zeta(-\alpha) + \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha+1}{m} \frac{B_m}{n^m}. \tag{9}$$

Приложенията на формулата на Ойлер-Макларън включват формулата на Стърлинг, формулата на Уолис и формули за суми от тригонометрични редици. Първите числа на Бернули имат генерираща функция

$$\frac{z e^{nz}}{e^z - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(n) \frac{z^m}{m!}.$$

С трансформация на Фурие се извежда на формулата за асимптотичното разширение на квадратурната формула на трапеците за определен интеграл

$$\mathcal{T}_h[y] = \int_0^x y(\xi) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} \left(y^{(2n-1)}(x) - y^{(2n-1)}(0) \right) h^{2n}.$$

Друга важна апроксимация за определения интеграл от втори ред на точност е квадратурната формула на правоъгълниците:

$$\mathcal{M}_h[y] = h\sum_{k=0}^{n-1} y\left(a + (k+1/2)\,h\right) = \int_a^b y(x)dx + O\left(h^2\right).$$

Квадратурната формула на правоъгълниците е апроксимация с отместване и има генерираща функция $\sqrt{x}/(1-x)$. Квадратурната формула на правоъгълниците има около два пъти по-висока точност от квадратурната формула на трапеците и асимптотично разширение [30]

$$\mathcal{M}_h[y] = \int_0^x y(\xi)d\xi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(2^{1-2k}-1\right)B_{2k}}{(2k)!}\left(y^{(2k-1)}(b) - y^{(2k-1)}(a)\right)h^{2k}.$$

Квадратурна формула на трапеците за дробнен интеграл

Подинтегралната функция в дефиницията на производна на Капуто и дробния интеграл има особенност в дясната граница x. Означаваме с $J^\alpha y(x)$ и $K^\alpha y(x)$ дробните интеграли

$$J^\alpha y(x) = \int_0^x (x-t)^\alpha y(t)dt, \quad K^\alpha y(x) = \int_0^x \frac{y(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt.$$

Дробните интеграли $J^\alpha y(x)$ и $K^\alpha y(x)$ удовлетворяват равенствата

$$J^\alpha y(x) = \Gamma(1+\alpha)I^{1+\alpha}y(x), \quad K^\alpha y(x) = \Gamma(\alpha)I^\alpha y(x).$$

Подинтегралната функция на дробния интеграл има стойност нула в десния край на интервала, при $\alpha > 1$. Когато $0 < \alpha < 1$ подинтегралната функция не е дефинирана в десния край на интервала. Означаваме с $\mathcal{T}_h^\alpha[y]$ квадратурната формула на трапеците за дробния интеграл $J^\alpha y(x)$

$$\mathcal{T}_h^\alpha[y] = h^{1+\alpha}\left(\frac{y(0)n^\alpha}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} y(x-kh)k^\alpha\right).$$

Квадратурната формула на трапеците за дробния интеграл и съответната Риманова сума имат генерираща функция $Li_{-\alpha}(x)$. От теоремата на Стоун-Вайерщрас знаем, че всяка непрекъсната функция е равномерна граница на полиноми. Много формули за числено интегриране се извеждат и доказват за подинтегрални функции, които са полиноми. При

конструирането на апроксимации за производната на Капуто можем също да допускаме, че функцията $y(t)$ е полином. В Глава 4 използваме разширението на сумата от степени (9) за извеждане на формулата за разширението от втори ред на квадратурната формула на трапеците за дробния интеграл $J^\alpha y(x)$

$$\mathcal{T}_h^\alpha[y] = J^\alpha y(x) + \zeta(-\alpha)y(x)h^{1+\alpha} + O\left(h^2\right). \tag{10}$$

Квадратурната формула на трапеците за дробния интеграл има точност $O\left(h^{1+\alpha}\right)$. Точността на апроксимацията на трапеците е по-ниска заради особеността на подинтегралната функция в дясната граница на дробния интеграл. В Глава 5 извеждаме формулата за разширението от четвърти ред на квадратурната формула на трапеците

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_h^\alpha[y] = J^\alpha y(x) + \zeta(-\alpha)y(x)h^{1+\alpha} - y'(x)\zeta(-1-\alpha)h^{2+\alpha} \\ + \frac{\alpha x^{\alpha-1}y(0) - x^\alpha y'(0)}{12}h^2 + \frac{y''(x)}{2}\zeta(-2-\alpha)h^{3+\alpha} + O\left(h^4\right),\end{aligned} \tag{11}$$

С използване на трансформацията на Фурие и разлагането на полилогаритмичната функция (2) в степенен ред се извежда асимптотичното разширение на апроксимацията на дробния интеграл с Риманови суми в десния край на интервала. В левия край на интервала формулата за асимптотичното разширение се извежда с формулата на Ойлер-Макларън за функцията $y(t)(x-t)^{\alpha-1}$:

$$\begin{aligned}\frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{y(x-kh)}{k^{1-\alpha}} = I^\alpha y(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\zeta(1-\alpha-k)}{k!}y^{(k)}(x)h^{k+\alpha} \\ - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{k+1}}{(k+1)!}\left(\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\binom{k}{m}\frac{x^{\alpha-m-1}}{\Gamma(\alpha-m)}y^{(m-k)}(0)\right)h^{k+1}.\end{aligned} \tag{12}$$

Апроксимацията с Риманови суми за дробния интеграл има точност $O\left(h^\alpha\right)$. Можем да разглеждаме формулата за асимптотичното разширение (12) като еквивалент на формулата на Ойлер-Макларън за дробни интеграли.

Диференциални уравнения от дробен ред (ДДУ)

Дробните диференциални уравнения са интегрални уравнения на Волтера, чието ядро има особенност. Диференциалният оператор на Капуто е нелокален оператор и има значителен потенциал при моделиране на процеси с памет. Изчислителните технологии отбелязват значителен напредък през последните три десетилетия. В същото време забелязваме и явна промяна от теоретичен към изчислителен подход към диференциалните уравнения. В тази глава въвеждаме основните концепции и методи за числено и аналитично решаване на диференциални уравнения от дробен ред.

Аналитични решения на ДДУ

Основните методи за определяне на аналитичните решения на дробни диференциални уравнения са трансформация на Лаплас, трансформация на Фурие, разделяне на променливите, разлагане по собствени вектори. Можем да отчетем, че има определено сходство между дробните диференциални уравнения и диференциалните уравнения с целочислени производни. Докато аналитичните методи за ДДУ са значително по-ограничени, разнообразието от методи за числено решаване на ДДУ е огромно. Трансформацията на Лаплас за функцията $y(x)$ се дефинира чрез равенството

$$\mathcal{L}[y(x)](\omega) = \tilde{y}(\omega) = \int_0^\infty e^{\omega x} y(x) dx.$$

Функцията $y(x) = x^{\alpha-1}$ има трансформация на Лаплас $\tilde{y}(\omega) = \Gamma(\alpha)\omega^{-\alpha}$. Трансформацията на Лаплас за дробния интеграл удовлетворява равен-

ството

$$\mathcal{L}[y^{(-\alpha)}(x)](\omega) = \omega^{-\alpha}\tilde{y}(\omega).$$

Производната на Капуто има трансформация на Лаплас

$$\mathcal{L}[y^{(n+\alpha)}(x)](\omega) = \omega^{\alpha}\tilde{y}(\omega) - \sum_{k=0}^{n} \omega^{k+\alpha-1} y^{(n-k)}(0).$$

Функцията на Митаг-Лефлер участва в аналитичните решения на обикновенни и частни диференциални уравнения. Производните на функциите на Митаг-Леглер имат трансформация на Лаплас

$$\mathcal{L}\{x^{\alpha k+\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm D x^{\alpha})\}(\omega) = \frac{k!\omega^{\alpha-\beta}}{(\omega^{\alpha} \mp D)^{k+1}}. \tag{13}$$

Дробното уравнение на релаксация е линейно обикновенно диференциално уравнение от дробен ред. Ще намерим аналитичното решение чрез използване на трансформацията на Лаплас. Дробното уравнение на релаксация има вида

$$y^{(\alpha)}(x) + Dy(x) = F(x),\ y(0) = y_0, \tag{14}$$

Производната на Капуто има трансформация на Лаплас при $0 < \alpha < 1$

$$\mathcal{L}[y^{(\alpha)}(x)](\omega) = \omega^{\alpha}\tilde{y}(\omega) - \omega^{\alpha-1} y(0).$$

Прилагаме трансформация на Лаплас за уравнение (14) и получаваме

$$\omega^{\alpha}\tilde{y}(\omega) - \omega^{\alpha-1} y_0 + D\tilde{y}(\omega) = \tilde{F}(\omega),$$

$$\tilde{y}(\omega) = \frac{y_0 \omega^{\alpha-1}}{\omega^{\alpha} + D} + \frac{\tilde{F}(\omega)}{\omega^{\alpha} + D}. \tag{15}$$

От (13) при $k = 0, \alpha = \beta$ и $k = 0, \beta = 1$ получаваме

$$\mathcal{L}\{x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-D x^{\alpha})\}(\omega) = \frac{1}{\omega^{\alpha} + D}, \quad \mathcal{L}\{E_{\alpha,1}(-D x^{\alpha})\}(\omega) = \frac{\omega^{\alpha-1}}{\omega^{\alpha} + D}.$$

Аналитичното решение на дробното уравнение на релаксация се получава с обратна трансформация на Лаплас за (15)

$$y(x) = y_0 E_{\alpha,1}(-D x^{\alpha}) + x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-D x^{\alpha}) * F(x),$$

$$y(x) = y_0 E_\alpha(-Dx^\alpha) + \int_0^x \xi^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-D\xi^\alpha\right) F(x-\xi) d\xi.$$

При $1 < \alpha < 2$, уравнение (14) се нарича дробно уравнение на осцилация

$$y^{(\alpha)}(x) + Dy(x) = F(x),\ y(0) = y_0,\ y'(0) = y_0'.$$

Дробното уравнение на осцилация има аналитично решение

$$y(x) = y_0 E_\alpha(-Dx^\alpha) + y_0' E_{\alpha,2}(-Dx^\alpha) + \int_0^x \xi^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(-D\xi^\alpha\right) F(x-\xi) d\xi.$$

Дробното уравнение на дифузията е параболично дробно диференциално уравнение, което се получава от частното диференциално уравнение на топлопроводността чрез замяна на първата производна по времето с дробна производна от ред α:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, u(x,0) = g(x). \end{cases} \tag{16}$$

Когато редът на дробната производна е между едно и две, уравнение (16) се нарича дробно уравнение на супер-дифузия. Аналитичното решение на дробното уравнение на дифузията се намира чрез използване на трансформация на Лаплас-Фурие [51] или по метода на разделяне на променливите. Дробното уравнение на дифузията има аналитично решение [24]

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n E_\alpha(-n^2\pi^2 t^\alpha) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

в областта $\{0 \le x \le l, t \ge 0\}$, където

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(\xi) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right) d\xi$$

и E_α е функцията на Митаг-Лефлер. Всеки член

$$E_\alpha(-n^2\pi^2 t^\alpha) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

е решение на (16) и c_n е коефициентът на синусовия ред на Фурие за функцията $g(x)$.

Числени решения на ДДУ

Частните дробни диференциални уравнения са доказали своята стойност при моделиране на ултра бавни дифузионни процеси във вискоеластични материали. С увеличение на полето на приложения на ДДУ възниква и необходимостта от разработване на методи от висок ред на точност за численно решаване на обикновенни и частни ДДУ. Численното решаване на частни ДДУ е предизвикателство дори и в случая на гладки решения и гранични условия.

Апроксимации за производната на Капуто

Апроксимацията на Грюнвалд и L1 апроксимацията са две стандартни апроксимации за производната на Капуто. Двете апроксимации са основа за конструиране на апроксимации от висок ред на точност за производната на Капуто.

Нека $h = 1/N$, където N е полжително число и $\mathcal{X}_N = \{x_m = mh\}_{m=0}^N$ е равномерна мрежа в интервала $[0, 1]$. Означаваме с $y_m = y(x_m)$ стойностите на функцията $y(x)$ в точките на мрежата $\mathcal{X}_N$. Апроксимацията на Грюнвалд за производната на Капуто

$$y_m^{(\alpha)} = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{n=0}^{m} w_n^{(\alpha)} y_{m-n} + O(h),$$

има тегла $w_n^{(\alpha)} = (-1)^n \binom{\alpha}{n}$. Числата $w_n^{(\alpha)}$ удовлетворяват условието $w_0^{(\alpha)} = 1$ и се пресмятат с рекурентната формула

$$w_n^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha + 1}{n}\right) w_{n-1}^{(\alpha)}.$$

Когато $0 < \alpha < 1$, теглата $w_n^{(\alpha)}$ имат следните свойства:

$$w_0^{(\alpha)} > 0, \quad w_1^{(\alpha)} < w_2^{(\alpha)} < \cdots < w_n^{(\alpha)} < \cdots < 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} w_n^{(\alpha)} = 0.$$

В Глава 4 извеждаме L1 апроксимацията (17) за производната на Капуто с приближение на първата производна с централна разлика и пресмятане на дробния интеграл върху всеки подинтервал на мрежата $\mathcal{X}_N$:

$$y_n^{(\alpha)} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha) h^\alpha} \sum_{k=0}^{n} \sigma_k^{(\alpha)} y_{n-k} + O\left(h^{2-\alpha}\right), \tag{17}$$

където $\sigma_0^{(\alpha)} = 1$, $\sigma_n^{(\alpha)} = (n-1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}$ и

$$\sigma_k^{(\alpha)} = (k+1)^{1-\alpha} - 2k^{1-\alpha} + (k-1)^{1-\alpha}, \quad (k = 2, \cdots, n-1).$$

Числата $\sigma_k^{(\alpha)}$ имат следните свойства:

$$\begin{aligned}
&\sigma_0^{(\alpha)} > 0,\ \sigma_1^{(\alpha)} < \sigma_2^{(\alpha)} < \cdots < \sigma_k^{(\alpha)} < \cdots < \sigma_{n-1}^{(\alpha)} < 0,\ \sigma_n^{(\alpha)} < 0,\\
&\sum_{k=0}^{n} \sigma_k^{(\alpha)} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} k\sigma_k^{(\alpha)} = -n^{1-\alpha},\\
&\sigma_k^{(\alpha)} = \frac{C_1}{k^{1+\alpha}} + O\left(\frac{1}{k^{2+\alpha}}\right), \quad \sigma_n^{(\alpha)} = \frac{C_2}{n^{\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right),
\end{aligned} \tag{18}$$

където $C_1 = \alpha(\alpha-1)$ и $C_2 = \alpha - 1$. Апроксимацията на Грюнвалд има първи ред на точност $O(h)$. Когато функцията $y \in C^2[0,x]$, точността на L1 апроксимацията е $O(h^{2-\alpha})$. Важен частен случай на L1 апроксимацията е приближението за стойността $y^{(\alpha)}(h)$ на производната на Капуто

$$y^{(\alpha)}(h) = \frac{y(h) - y(0)}{\Gamma(2-\alpha)h^{\alpha}} + O\left(h^{2-\alpha}\right). \tag{19}$$

В Глава 4 показваме, че (19) е оптимално приближение за $y^{(\alpha)}(h)$. Това приближение се използва при конструирането на диференчни схеми от висок ред на точност за обикновенни и частни ДДУ. В Глава 4 използваме формулата за разширението на сума от степени за извеждане на разширението от втори ред на L1 апроксимацията

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{N} \sigma_k^{(\alpha)} y(x-kh) = y^{(\alpha)}(x) + \frac{\zeta(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} y''(x) h^{2-\alpha} + O\left(h^2\right). \tag{20}$$

Със замяна на $y''(x)$ с крайна разлика назад от втори ред получаваме апроксимацията от втори ред за производната на Капуто.

$$y^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n} \delta_k^{(\alpha)} y(x-kh) + O\left(h^2\right). \tag{21}$$

Теглата $\delta_k^{(\alpha)}$ на апроксимацията (21) се получават от теглата $\sigma_k^{(\alpha)}$ на L1 апроксимацията (17) с модификация на първите три тегла със стойността на Дзета-функцията в точката $\alpha - 1$

$$\delta_0^{(\alpha)} = \sigma_0^{(\alpha)} - \zeta(\alpha-1),\ \delta_1^{(\alpha)} = \sigma_1^{(\alpha)} + 2\zeta(\alpha-1),\ \delta_2^{(\alpha)} = \sigma_2^{(\alpha)} - \zeta(\alpha-1),$$

$$\delta_k^{(\alpha)} = \sigma_k^{(\alpha)} = (k+1)^{1-\alpha} - 2k^{1-\alpha} + (k-1)^{1-\alpha}, \quad (k = 3, \cdots, n).$$

Числата $\delta_k^{(\alpha)}$ удовлетворяват неравенствата

$$\delta_0^{(\alpha)} > 0, \delta_1^{(\alpha)} < 0, \delta_2^{(\alpha)} > 0, \delta_3^{(\alpha)} < \cdots < \delta_k^{(\alpha)} < \cdots < \delta_{n-1}^{(\alpha)} < 0, \delta_n^{(\alpha)} < 0.$$

В Глава 5 извеждаме формулата за разширението от четвърти ред на L1 апроксимацията за производната на Капуто

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)h^\alpha} \sum_{k=0}^{N} \sigma_k^{(\alpha)} y(x-kh) = y^{(\alpha)}(x) + \frac{\zeta(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} y''(x) h^{2-\alpha} \\ + \left(\frac{d^2}{dx^2} y^{(\alpha)}(x) - \frac{y'(0)}{\Gamma(-\alpha) x^{1+\alpha}} \right) \frac{h^2}{12} - \frac{\zeta(\alpha-2)}{\Gamma(2-\alpha)} y'''(x) h^{3-\alpha} \\ + \left(\zeta(\alpha-3) + \frac{\zeta(\alpha-1)}{6} \right) \frac{y^{(4)}(x)}{2\Gamma(2-\alpha)} h^{4-\alpha} + O\left(h^4\right). \end{aligned} \tag{22}$$

От формула (22) получаваме триточковата L1 апроксимация

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)h^\alpha} \sum_{k=0}^{n} \delta_k^{(\alpha)} y_{n-k} = \frac{13}{12} y_n^{(\alpha)} - \frac{1}{6} y_{n-1}^{(\alpha)} + \frac{1}{12} y_{n-2}^{(\alpha)} + O\left(h^{3-\alpha}\right). \tag{23}$$

Когато функцията $y \in C^3[0,x]$ и $y'(0) = 0$ тритичковата апроксимация (23) за производната на Капуто има точност $O\left(h^{3-\alpha}\right)$.

Числени решения на обикновеното дробно уравнение на релаксация

В тази част пресмятаме числените решения на дробното уравнение на релаксация, които използват апроксимации (1), (7), (8), (17), (21) и (23) за производната на Капуто. Задачата има вида

$$y^{(\alpha)}(x) + Dy(x) = F(x), \; y(0) = y_0. \tag{24}$$

• Приближаваме $y_n^{(\alpha)}$ с апроксимация на Грюнвалд от **първи ред** (1)

$$\frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{n} w_k^{(\alpha)} y_{n-k} + Dy_n + E_n = F_n,$$

където E_n грешката на апроксимация в точката $x_n = nh$. Нека u_n е апроксимация на стойността на решението y_n.

$$\sum_{k=0}^{n} w_k^{(\alpha)} u_{n-k} + h^\alpha D u_n = h^\alpha F_n.$$

Числата u_n се пресмятат по формулите $u_0 = y_0$,

$$u_n = \frac{1}{w_0^{(\alpha)} + Dh^\alpha} \left(h^\alpha F_n - \sum_{k=1}^{n} w_k^{(\alpha)} u_{n-k} \right). \tag{25}$$

Пример 1: Дробното уравнение на релаксация

$$y^{(\alpha)}(x) + y(x) = 6x^{3+\alpha} + \Gamma(4+\alpha)x^3,\ y(0) = 0, \tag{26}$$

има решение $y(x) = 6x^{3+\alpha}$.

Таблица 1: Грешка и ред на сходимост на численото решение от първи ред (25) на уравнение (26) при $\alpha = 0.3, 0.5, 0.9$.

$\boldsymbol{h}$	$\boldsymbol{\alpha = 0.3}$		$\boldsymbol{\alpha = 0.5}$		$\boldsymbol{\alpha = 0.9}$	
	Грешка	*Ред*	*Грешка*	*Ред*	*Грешка*	*Ред*
0.025	0.0427113	0.9939	0.0833448	0.9946	0.2008610	0.9997
0.0125	0.0214007	0.9970	0.0417499	0.9973	0.1004350	0.9999
0.00625	0.0107116	0.9985	0.0208943	0.9987	0.0502176	1.0000
0.003125	0.0053586	0.9992	0.0104520	0.9993	0.0251088	1.0000

• Численото решение на дробното уравнение на релаксация от **ред** $\boldsymbol{2-\alpha}$, което използва L1 апроксимацията (17) за производната на Капуто се извежда от (25) с тегла $w_k^{(\alpha)} = \sigma_k^{(\alpha)}/\Gamma(2-\alpha)$. Числата u_n се пресмятат по формулите $u_0 = y_0$,

$$u_n = \frac{1}{\sigma_0^{(\alpha)} + \Gamma(2-\alpha)Dh^\alpha} \left(\Gamma(2-\alpha)h^\alpha F_n - \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^{(\alpha)} u_{n-k} \right). \tag{27}$$

• Численото решение на дробното уравнение на релаксация, което използва L1 апроксимацията (21) от **втори ред** за производната на Капуто се

Таблица 2: Грешка и ред на сходимост на числено решение (27) от ред $2-\alpha$ на уравнение (26) при $\alpha = 0.3, 0.5, 0.9$.

$\boldsymbol{h}$	$\boldsymbol{\alpha = 0.3}$		$\boldsymbol{\alpha = 0.5}$		$\boldsymbol{\alpha = 0.9}$	
	Грешка	*Ред*	*Грешка*	*Ред*	*Грешка*	*Ред*
0.025	0.00498175	1.6047	0.01823680	1.4392	0.1499070	1.0866
0.0125	0.00161103	1.6287	0.00663074	1.4596	0.0703237	1.0920
0.00625	0.00051501	1.6453	0.00238909	1.4727	0.0329144	1.0953
0.003125	0.00016326	1.6575	0.00085567	1.4813	0.0153841	1.0973

Таблица 3: Грешка и ред на сходимост на численото решение от втори ред (28) на уравнение (26) при $\alpha = 0.3, 0.5, 0.9$.

$\boldsymbol{h}$	$\boldsymbol{\alpha = 0.3}$		$\boldsymbol{\alpha = 0.5}$		$\boldsymbol{\alpha = 0.9}$	
	Грешка	*Ред*	*Грешка*	*Ред*	*Грешка*	*Ред*
0.025	0.00108487	1.8197	0.00083458	1.3354	0.00550244	2.0935
0.0125	0.00029119	1.8975	0.00026484	1.6559	0.00126378	2.1223
0.00625	0.00007589	1.9399	0.00007629	1.7956	0.00028691	2.1391
0.003125	0.00001945	1.9641	0.00002087	1.8703	0.00006461	2.1507

извежда от (25) с тегла $w_k^{(\alpha)} = \delta_k^{(\alpha)}/\Gamma(2-\alpha)$. Числото $\tilde{y}_1$ е приближение на стойността на решението y_1 с втори ред на точност $O\left(h^2\right)$, където

$$\tilde{y}_1 = \frac{\tilde{y}_0 + \Gamma(2-\alpha)h^\alpha F_1}{1 + \Gamma(2-\alpha)h^\alpha}.$$

Числата u_n се пресмятат рекурентно по формулите $u_0 = y_0,\ u_1 = \tilde{y}_1$,

$$u_n = \frac{1}{\delta_0^{(\alpha)} + \Gamma(2-\alpha)Dh^\alpha}\left(\Gamma(2-\alpha)h^\alpha F_n - \sum_{k=1}^{n}\delta_k^{(\alpha)}u_{n-k}\right). \qquad (28)$$

• Извеждаме численото решение на дробното уравнение на релаксация от **ред $\boldsymbol{3-\alpha}$**, което използва триточковата L1 апроксимация за (23) производната на Капуто

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)h^\alpha}\sum_{k=0}^{n}\delta_k^{(\alpha)}y_{n-k} = \frac{13}{12}y_n^{(\alpha)} - \frac{1}{6}y_{n-1}^{(\alpha)} + \frac{1}{12}y_{n-2}^{(\alpha)} + E_n.$$

Таблица 4: Грешка и ред на сходимост на числено решение (29) от ред $3-\alpha$ на уравнение (26) при $\alpha = 0.3, 0.5, 0.9$.

$\boldsymbol{h}$	$\boldsymbol{\alpha = 0.3}$		$\boldsymbol{\alpha = 0.5}$		$\boldsymbol{\alpha = 0.9}$	
	Грешка	*Ред*	*Грешка*	*Ред*	*Грешка*	*Ред*
0.025	0.00017167	2.6083	0.00072756	2.4355	0.00789278	2.0482
0.0125	0.00002764	2.6348	0.00013218	2.4606	0.00187394	2.0745
0.00625	4.40×10^{-6}	2.6514	0.00002378	2.4748	0.00044102	2.0872
0.003125	6.95×10^{-7}	2.6626	4.25×10^{-6}	2.4834	0.00010334	2.0935

От (24) при $x = x_k$ имаме $y_k^{(\alpha)} = F_k - Dy_k$. Заместваме и получаваме

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)h^\alpha}\sum_{k=0}^{n}\delta_k^{(\alpha)}y_{n-k} = \frac{13}{12}(F_n - Dy_n) - \frac{1}{6}\left(F_{n-1} - Dy_{n-1}\right) + \frac{1}{12}\left(F_{n-2} - Dy_{n-2}\right) + E_n.$$

Нека u_n е апроксимация на решението y_n в точката $x_n = nh$

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)h^\alpha}\sum_{k=0}^{n}\delta_k^{(\alpha)}w_{n-k} = \frac{13}{12}(F_n - Dw_n) - \frac{1}{6}\left(F_{n-1} - Dw_{n-1}\right) + \frac{1}{12}\left(F_{n-2} - Dw_{n-2}\right).$$

Числата u_n се пресмятат рекурентно по формулите $u_0 = y_0,\ u_1 = \tilde{y}_1$,

$$u_n = \frac{1}{12\delta_0^{(\alpha)} + 13D\Gamma(2-\alpha)h^\alpha}\Bigg(-12\sum_{k=1}^{n}\delta_k^{(\alpha)}u_{n-k} + \Gamma(2-\alpha)h^\alpha(13F_n - 2(F_{n-1} - Du_{n-1}) + F_{n-2} - Du_{n-2})\Bigg). \quad (29)$$

• Численото решение от **втори ред** на дробното уравнение на релаксация което използва двуточковата апроксимация на Грюнвалд (7) за производната на Капуто се пресмята по формулите $u_0 = y_0$,

$$u_n = \frac{1}{1 + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)h^\alpha}\Bigg(-\sum_{k=2}^{n} w_k^{(\alpha)}u_{n-k} + \frac{\alpha}{2}\left(2 - h^\alpha\right)F_n + h^\alpha\left(1 - \frac{\alpha}{2}F_n + \frac{\alpha}{2}F_{n-1}\right)\Bigg). \quad (30)$$

Таблица 5: Грешка и ред на сходимост на числено решение (30) от втори ред на уравнение (26) при $\alpha = 0.3, 0.5, 0.9$.

$\boldsymbol{h}$	$\boldsymbol{\alpha = 0.3}$		$\boldsymbol{\alpha = 0.5}$		$\boldsymbol{\alpha = 0.9}$	
	Грешка	*Ред*	*Грешка*	*Ред*	*Грешка*	*Ред*
0.025	0.00078916	1.9877	0.00140252	1.9899	0.00257305	1.9970
0.0125	0.00019813	1.9939	0.00035185	1.9950	0.00064391	1.9986
0.00625	0.00004964	1.9969	0.00008812	1.9975	0.00016106	1.9993
0.003125	0.00001242	1.9985	0.00002205	1.9988	0.00004027	1.9996

Таблица 6: Грешка и ред на сходимост на числено решение (31) от трети ред на уравнение (26) при $\alpha = 0.3, 0.5, 0.9$.

$\boldsymbol{h}$	$\boldsymbol{\alpha = 0.3}$		$\boldsymbol{\alpha = 0.5}$		$\boldsymbol{\alpha = 0.9}$	
	Грешка	*Ред*	*Грешка*	*Ред*	*Грешка*	*Ред*
0.025	0.00003099	3.3000	0.00002384	2.9635	0.00005093	2.9571
0.0125	3.14×10^{-6}	3.3000	3.01×10^{-6}	2.9831	6.46×10^{-6}	2.9796
0.00625	3.19×10^{-7}	3.3000	3.79×10^{-7}	2.9919	8.13×10^{-7}	2.9901
0.003125	3.24×10^{-8}	3.3000	4.75×10^{-8}	2.9961	1.02×10^{-7}	2.9951

• Численото решение от **трети ред** на дробното уравнение на релаксация, което използва триточковата апроксимация на Грюнвалд (8) се пресмята по формулите $u_0 = y_0$,

$$u_n = \frac{1}{1 + \left(1 - \frac{17\alpha}{24} + \frac{\alpha^2}{8}\right) h^\alpha} \Bigg(- \sum_{k=1}^{n} w_k^{(\alpha)} u_{n-k} + h^\alpha \left(1 - \frac{17\alpha}{24} + \frac{\alpha^2}{8}\right) F_n$$
$$+ h^\alpha \left(\frac{11\alpha}{12} - \frac{\alpha^2}{4}\right) (F_{n-1} - u_{n-1}) + h^\alpha \left(\frac{\alpha^2}{8} - \frac{5\alpha}{24}\right) (F_{n-2} - u_{n-2}) \Bigg). \quad (31)$$

Числени решения на дробното уравнение на дифузията

В тази част конструираме диференчни схеми за дробното уравнение на дифузията с използване на L1 апроксимацията и L1 апроксимацията от

втори ред за производната на Капуто по времето. Разглеждаме задачата

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in [0,l] \times [0,T], \\ u(x,0) = u_0(x),\ u(0,t) = u_L(t),\ u(l,t) = u_R(t). \end{cases} \tag{32}$$

Нека $h = l/N, \tau = T/M$, където M и N са естествени числа, и $\mathcal{G}_N^M$ е мрежа в правоъгълника $[0,l] \times [0,T]$

$$\mathcal{G}_N^M = \{(nh, m\tau) | 1 \le n \le N, 1 \le m \le M\}.$$

Означаваме с u_n^m, F_n^m стойностите на функциите $u(x,t)$ и $F(x,t)$ в точките на мрежата $\mathcal{G}_N^M$:

$$u_n^m = u(nh, m\tau), \quad F_n^m = F(nh, m\tau).$$

Апроксимирайки производната на Капуто по времето в точките (nh, τ) с апроксимацията (19) и втората производна по пространството с централна разлика от втори ред, получаваме

$$\frac{u_n^1 - u_n^0}{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)} = \frac{u_{n-1}^1 - 2u_n^1 + u_{n+1}^1}{h^2} + F(nh,\tau) + O\left(h^2 + \tau^{2-\alpha}\right).$$

Въвеждаме означението

$$\eta = \Gamma(2-\alpha)\frac{\tau^\alpha}{h^2}.$$

Решението на дробното уравнение на дифузията удовлетворява равенството

$$-\eta u_{n-1}^1 + (1+2\eta)u_n^1 - \eta u_{n+1}^1 = u_n^0 + \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha F(nh,\tau) + O\left(\tau^\alpha h^2 + \tau^2\right).$$

Нека U_n^m е численото решение на дробното уравнение на дифузията в точките на мрежата $\mathcal{G}_N^M$. Числата U_n^m са приближения за стойностите на решението $u_n^m = u(nh, m\tau)$. Числата U_n^0 се пресмятат от началното условие $U_n^0 = u_0(nh)$. Сойностите на U_n^1 на първия слой на мрежата $\mathcal{G}_N^M$ са приближения за стойностите на решението на уравнение (32) за време $t = \tau$. Числата U_n^1 се пресмятат след решаване на системата

$$-\eta U_{n-1}^1 + (1+2\eta)U_n^1 - \eta U_{n+1}^1 = U_n^0 + \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha F_n^1,$$

където $U_0^1 = u_L(\tau),\ U_n^1 = u_R(\tau)$ и $1 < k < N-1$:

$$\begin{cases} (1+2\eta)U_1^1 - \eta U_2^1 = u_0(h) + \eta u_L(\tau) + \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha F_1^1, \\ -\eta U_{k-1}^1 + (1+2\eta)U_k^1 - \eta U_{k+1}^1 = u_0(kh) + \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha F_k^1, \\ -\eta U_{N-2}^1 + (1+2\eta)U_{N-1}^1 = u_0((N-1)h) + \eta u_R(\tau) + \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha F_{N-1}^1. \end{cases}$$

Нека K е тридиагоналната матрица от размерност $N-1$ със стойности $1+2\eta$ по главния диагонал, и $-\eta$ по диагоналите над и под главния диагонал. Означаваме с U^m вектора стълб $U^m = \left(U_1^m, U_2^m, \cdots, U_{N-1}^m\right)^T$. Численото решение U^m на m-тия слой на $\mathcal{G}_N^M$ се пресмята от линейната система

$$KU^m = R_1 + \eta R_2, \tag{33}$$

където R_1 и R_2 са вектор-стълбовете

$$R_1^T = \left[-\sum_{k=1}^{m} \sigma_k^{(\alpha)} U_n^{m-k} + \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha F_n^m \right]_{n=1}^{N-1},$$

$$R_2 = \left[u_L(m\tau), 0, \cdots, 0, u_R(m\tau)\right]^T.$$

Дискретизирайки производната на Капуто с L1 апроксимацията от втори ред, получаваме ($m \geq 2$ и $1 \leq n \leq N-1$)

$$\frac{1}{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^{m} \delta_k^{(\alpha)} u_n^{m-k} = \frac{u_{n-1}^m - 2u_n^m + u_{n+1}^m}{h^2} + F(nh, m\tau) + O\left(h^2 + \tau^2\right).$$

Стойностите на численото решение U_n^m се пресмятат от уравненията

$$-\eta U_{n-1}^m + (\delta_0^{(\alpha)} + 2\eta)U_n^m - \eta U_{n+1}^m = -\sum_{k=1}^{m} \delta_k^{(\alpha)} U_n^{m-k} + \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha F_n^m.$$

Векторът U^m е решение на линейната система

$$(K - \zeta(a-1)I)U^m = R_1 + \eta R_2, \tag{34}$$

където R_1 и R_2 са вектор-стълбовете

$$R_1 = \left[-\sum_{k=1}^{m} \delta_k^{(\alpha)} U_n^{m-k} + \Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha F_n^m \right]_{n=1}^{N-1},$$

$$R_2 = [u_L(m\tau), 0, \cdots, 0, u_R(m\tau)]^T .$$

Численото решение (34) има точност $O\left(h^2\right)$, а точността на числено решение (33) е $O\left(h^{2-\alpha}\right)$.

Дробното уравнение на дифузията

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + F(x,t), \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,1], \\ u(x,0) = u_0(x),\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \end{cases} \tag{35}$$

където

$$F(x,t) = 2(1-3x)(5t^2-4t+1) + x^2(1-x)\left(\frac{10t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \frac{4t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right),$$

има решение

$$u(x,t) = x^2(1-x)(1-4t+5t^2).$$

Максималната грешка и редът на сходимост на числените решения (33) и (34) за $\tau = h,\ \tau = h/2$ и $t = 1$ на дробното уравнение на дифузията (35) са представени в Таблица 7 и Таблица 8.

Таблица 7: Максимална грешка и ред на сходимост на числени решения (33) и (34) на уравнение (35) при $\alpha = 0.6,\ \tau = h$ и $t = 1$.

$h = \tau$	*Грешка*	*Ред*	$h = \tau$	*Грешка*	*Ред*
0.025	0.00019766	1.38974	0.025	2.99×10^{-6}	1.96593
0.0125	0.00007530	1.39222	0.0125	7.62×10^{-7}	1.97559
0.00625	0.00002864	1.39467	0.00625	1.93×10^{-7}	1.98175
0.003125	0.00001087	1.39657	0.003125	4.87×10^{-8}	1.98648

Таблица 8: Максимална грешка и ред на сходимост на числени решения (33) и (34) на уравнение (35) при $\alpha = 0.4,\ \tau = 0.5h$ и $t = 1$.

$h\ (h = 2\tau)$	*Грешка*	*Ред*	$h\ (h = 2\tau)$	*Грешка*	*Ред*
0.025	0.00002069	1.57697	0.025	1.11×10^{-6}	1.99521
0.0125	6.91×10^{-6}	1.58139	0.0125	2.78×10^{-7}	1.99589
0.00625	2.30×10^{-6}	1.58597	0.00625	6.95×10^{-8}	1.99701
0.003125	7.65×10^{-7}	1.58946	0.003125	1.74×10^{-8}	1.99811

Дробни полиноми на Тейлър

В предишните параграфи разгледахме апроксимации за производната на Капуто и числени решения на дробни диференциални уравнения. Точността на апроксимациите и на числените решения се отнася за класа на диференцируемите функции. Докато класът на диференцируемите функции е основен клас, решенията на ДДУ имат естествена особенност, обикновенно в началната точка $t = 0$. В този случай, численото решение е сходящо към точното решение, но точността на метода е по-ниска от очакваната точност в класа на гладките решения.

Пример 2: Дробното уравнение на релаксация

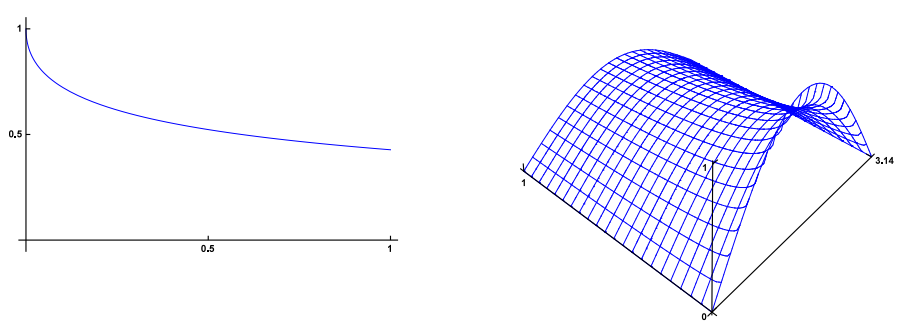
$$y^{(\alpha)}(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \tag{36}$$

има аналитично решение $y(x) = E_\alpha\left(-x^\alpha\right)$.

Пример 3: Дробното уравнение на дифузията

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = \sin x, \ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \end{cases} \tag{37}$$

има аналитично решение $u(x,t) = \sin x E_\alpha\left(-t^\alpha\right)$. Решенията на уравнения (36) и (37) имат особенност от ред α при $t = 0$. Графиките на решенията на уравнения (36) и (37) са дадени на Фигура 1.



Фигура 1: Графики на аналитичните решения на дробните уравнения на релаксация и дифузия (36) и (37) при $\alpha = 0.5$.

Таблица 9: Максимална грешка и ред на сходимост на числени решения (27) и (33) на уравнение (36) на интервала $[0,1]$ (ляво) и уравнението за дуфузията (37) при $\tau = 3h/\pi$ и $t = 1$ (дясно) за $\alpha = 0.5$.

h	*Грешка*	*Ред*
0.025	0.0331978	0.414001
0.0125	0.024484	0.439247
0.00625	0.0178342	0.457192
0.003125	0.0128769	0.469859

τ $(h = \pi\tau/3)$	*Грешка*	*Ред*
0.025	0.00184202	1.05524
0.0125	0.00089863	1.03549
0.00625	0.00044211	1.02333
0.003125	0.00021867	1.01563

Таблица 10: Максимална грешка и ред на сходимост на числени решения (28) и (34) на уравнение (36) на интервала $[0,1]$ (ляво) и уравнението за дуфузията (37) при $\tau = 3h/\pi$ и $t = 1$ (дясно), за $\alpha = 0.5$.

h	*Грешка*	*Ред*
0.05	0.0442319	0.378959
0.025	0.0331978	0.414001
0.0125	0.024484	0.439247
0.00625	0.0178342	0.457192
0.003125	0.0128769	0.469859

τ $(h = \pi\tau/3)$	*Грешка*	*Ред*
0.05	0.00222875	1.03303
0.025	0.00108596	1.03727
0.0125	0.00053127	1.03146
0.00625	0.00026116	1.02448
0.003125	0.00012893	1.01838

В Таблица 9 и Таблица 10 пресмятаме грешката и реда на сходимост на числените решения (27) и (28) на дробното уравнение на релаксация и числени решения (33) и (34) на дробното уравнение на дифузията. Особеноста на решението на дробното уравнение на релаксация в $t = 0$ води до намаляване на точността на числените решения (27) и (28) от $O\left(h^{2-\alpha}\right)$ и $O\left(h^2\right)$ до точност $O\left(h^{\alpha}\right)$. Точността на числените решения (33) и (34) на дробното уравнение на дифузията намалява от $O\left(\tau^{2-\alpha}\right)$ и $O\left(\tau^2\right)$ до $O\left(\tau\right)$. Доказателство за сходимостта на числено решение (33) и оценка за точността на метода се извеждат в [27]. Апроксимации на производната на Капуто и числени решения на ДДУ с диференцируеми решения са изучавани задълбочено през последните три десетилетия. В същото време много малко е известно по въпроса за числените решения на ДДУ, чиито решения имат особенност, което е естествения случай в класа на ДДУ. В тази част използваме дробните полиноми на Тейлър на решенията на уравнения (36) и (37) за подобряване на класа на дуференцируемост на решенията и точността на числените методи.

Дробно уравнение на релаксация

Дробното уравнение на релаксация е линейно обикновено ДДУ. Особеноста на решението при $t = 0$ води до намаляване на точноста на численото решение (27) от $O\left(h^{2-\alpha}\right)$ до $O\left(h^{\alpha}\right)$. Числените резултати за $\alpha = 0.5, 0.3, 0.7$ са дадени в Таблица 9 и Таблица 11.

Таблица 11: Максимална грешка и ред на сходимост на числено решение (27) на уравнение (36) при $\alpha = 0.3$ (ляво) и $\alpha = 0.7$ (дясно).

h	*Грешка*	*Ред*
0.025	0.0441259	0.170715
0.0125	0.0386498	0.191164
0.00625	0.0334386	0.208945
0.003125	0.0286254	0.224219

h	*Грешка*	*Ред*
0.025	0.0567272	0.566632
0.0125	0.0365217	0.635288
0.00625	0.0229408	0.670839
0.003125	0.0142437	0.687593

Разглеждаме уравнение

$$y^{(\alpha)}(x) + By(x) = 0,\ y(0) = 1. \tag{38}$$

Определяме производните на Милър-Рос за решението на уравнение (38) в началната точка $x = 0$ с последователно прилагане на дробно диференциране. Производната на Милър-Рос от ред α е равна на производната на Капуто. При $x = 0$ получаваме $y^{(\alpha)}(0) = -By(0) = -B$. Прилагаме дробно диференциране от ред α

$$y^{[2\alpha]}(x) + By^{[\alpha]}(x) = 0,$$

$$y^{[3\alpha]}(x) + By^{[2\alpha]}(x) = 0.$$

От двете уравнения намираме стойностите на $y^{[2\alpha]}(0)$ и $y^{[3\alpha]}(0)$:

$$y^{[2\alpha]}(0) = -By^{[\alpha]}(0) = B^2, \quad y^{[3\alpha]}(0) = -By^{[2\alpha]}(0) = -B^3.$$

Диференцираме $n-1$ пъти уравнение (38). Получаваме:

$$y^{[n\alpha]}(0) = -By^{[(n-1)\alpha]}(0).$$

По индукция можем да покажем, че $y^{[n\alpha]}(0) = (-B)^n$. Решението на уравнение (36) има дробни полиноми на Тейлър

$$T_m^{(\alpha)}(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{(-Bh^{\alpha})^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}.$$

Дробните полиноми на Тейлър се използват за подобряване на класа на диференцируемост на решението на дробното уравнение на релаксация. Нека m е положително число такова, че $m\alpha \geq 2$. Полагаме

$$z(x) = y(x) - \sum_{n=0}^{m} \frac{(-Bx^{\alpha})^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}.$$

Функцията $z(x)$ има производна на Капуто

$$z^{(\alpha)}(x) = y^{(\alpha)}(x) + B \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-Bx^{\alpha})^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}.$$

Функцията $z(x)$ е двукратно диференцируема функция, която е решение на уравнението

$$z^{(\alpha)}(x) + Bz(x) = \frac{(-B)^{m+1} x^{\alpha m}}{\Gamma(\alpha m + 1)}, \quad z(0) = 0. \tag{39}$$

Точността на числените решения (27) и (28) на уравнение (39) е $O\left(h^{2-\alpha}\right)$ и $O\left(h^2\right)$ при $m\alpha \geq 2$.

- Нека $\alpha = 0.3, B = 1$ и $m = 7$. Дробното уравнение на релаксация

$$y^{(0.3)}(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 1 \tag{40}$$

има решение $E_{0.3}(-x^{0.3})$. Полагаме

$$z(x) = y(x) + \sum_{n=0}^{7} (-1)^{n+1} \frac{x^{0.3n}}{\Gamma(0.3n + 1)}.$$

Функцията $z(x) \in C^2[0, 1]$ и е решение на уравнението

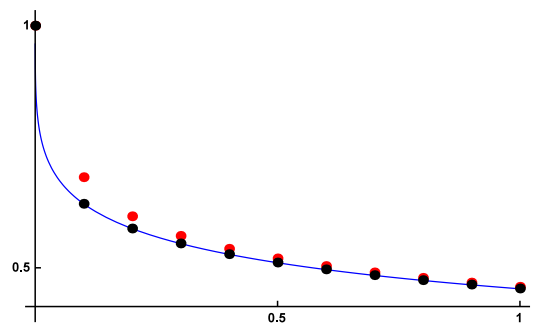
$$z^{(0.3)}(x) + z(x) = \frac{x^{2.1}}{\Gamma(3.1)}, \quad z(0) = 0. \tag{41}$$

Таблица 12: Максимална грешка и ред на сходимост на числени решения (27) и (28) на уравнение (41).

h	*Грешка*	*Ред*
0.025	0.00007356	1.63301
0.0125	0.00002347	1.64829
0.00625	7.43×10^{-6}	1.65956
0.003125	2.34×10^{-6}	1.66807

h	*Грешка*	*Ред*
0.025	0.0000132354	1.93674
0.0125	3.39×10^{-6}	1.96378
0.00625	8.61×10^{-7}	1.97867
0.003125	2.17×10^{-7}	1.98724

Фигура 2: Графика на аналитичното решение на уравнение (40) и числени решения (27)-*червено* и (27)-*черно* (на уравнение (41)), при $h = 0.1$.



Грешката и реда на сходимост на числените решения (27) и (28) на уравнение (41) са дадени в Таблица 12. На Фигура 2 сравняваме аналитичното решение на (40) с числено решение (27) и численото решение (27) на уравнение (41).

• Нека $\alpha = 0.7, m = 3$ и $B = 4$. Имаме

$$y^{(0.7)}(x) + 4y(x) = 0, \quad y(0) = 1. \tag{42}$$

Заместваме

$$z(x) = y(x) - 1 + \frac{4x^{0.7}}{\Gamma(1.7)} - \frac{16x^{1.4}}{\Gamma(2.4)} + \frac{64x^{2.1}}{\Gamma(3.1)}.$$

Функцията $z(x)$ е решение на дробното уравнение на релаксация

$$z^{(0.7)}(x) + z(x) = \frac{256x^{2.1}}{\Gamma(3.1)}, \quad z(0) = 0. \tag{43}$$

Максималната грешка и редът на сходимост на числени решения (27) и (28) на уравнение (43) са представени в Таблица 13.

Таблица 13: Максимална грешка и ред на сходимост на числени решения (27) и (28) на уравнение (43).

h	*Грешка*	*Ред*
0.025	0.0338612	1.28546
0.0125	0.0138328	1.29154
0.00625	0.0056374	1.29499
0.003125	0.0022943	1.29701

h	*Грешка*	*Ред*
0.025	0.00136314	2.32411
0.0125	0.00024704	2.46412
0.00625	0.00004329	2.51272
0.003125	7.24×10^{-6}	2.57940

Дробно уравнение на дифузията

В тази част определяме дробните полиноми на Тейлър за решението на дробното уравнение на дифузията и ги прилагаме за подобряване на точността на числените решения.

Разглеждаме задачата

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = \sin x, \ u(0,t) = u(\pi,t) = 0. \end{cases} \tag{44}$$

Означаваме с $D_t^\alpha u(x,t)$ производната на Милър-Рос от ред α на функцията $u(x,t)$ по времето:

$$D_t^\alpha u(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}.$$

С последователно диференциране от ред α получаваме

$$D_t^{2\alpha} u(x,t) = D_t^\alpha D_t^\alpha u(x,t) = D_t^\alpha \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_t^\alpha u(x,t) = \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4},$$

$$D_t^{3\alpha} u(x,t) = D_t^\alpha D_t^{2\alpha} u(x,t) = D_t^\alpha \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = \frac{\partial^4}{\partial x^4} D_t^\alpha u(x,t) = \frac{\partial^6 u(x,t)}{\partial x^6}.$$

По този начин намираме производната на Милър-Рос от ред $n\alpha$

$$D_t^{n\alpha} u(x,t) = \frac{\partial^{2n} u(x,t)}{\partial x^{2n}}.$$

При $t = 0$ получаваме

$$D_t^{n\alpha} u(x,0) = \frac{\partial^{2n} u(x,0)}{\partial x^{2n}} = \frac{\partial^{2n} \sin x}{\partial x^{2n}} = (-1)^n \sin x.$$

Решението на уравнение (44) има дробни полиноми на Тейлър

$$T_m^{(\alpha)}(x,t) = \sin x \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}.$$

Полагаме

$$v(x,t) = u(x,t) - \sin x \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}.$$

Функцията $v(x,t)$ удовлетворява равенствата

$$D_t^{\alpha} v(x,t) = D_t^{\alpha} u(x,t) + \sin x \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^{n+1} \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) + \sin x \sum_{n=0}^{m} (-1)^{n+1} \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}.$$

Функцията $v(x,t)$ е решение на дробното уравнение на дифузията

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{\alpha} v(x,t)}{\partial t^{\alpha}} = \dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + (-1)^{m+1} \sin x \dfrac{t^{m\alpha}}{\Gamma(m\alpha+1)}, \\ v(x,0) = v(0,t) = v(\pi,t) = 0. \end{cases}$$

Пример 4: Нека $\alpha = 0.3$ and $m = 7$. Дробното уравнение на дифузията

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{0.3} u(x,t)}{\partial t^{0.3}} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \\ u(x,0) = \sin x, \ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \end{cases} \tag{45}$$

има решение $u(x,t) = \sin x E_{0.3}\left(-t^{0.3}\right)$. Диференчните схеми (33) и (34) за уравнение (45) имат точност $O(\tau)$ по времето. (Таблица 14 (ляв стълб) и Таблица 15 (ляв стълб)). Полагаме

$$v(x,t) = u(x,t) - \sin x \sum_{n=0}^{7} (-1)^n \frac{h^{0.3n}}{\Gamma(0.3n+1)}.$$

Функцията $v(x,t)$ е двукратно гладка функция която, е решение на дробното уравнение на дифузията

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{0.3} v(x,t)}{\partial t^{0.3}} = \dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + \sin x \dfrac{t^{2.1}}{\Gamma(3.1)}, \\ v(x,0) = v(0,t) = v(\pi,t) = 0. \end{cases} \tag{46}$$

В Таблица 14 (десен стълб) и Таблица 15 (десен стълб) пресмятаме максималната грешка и числения ред на сходимост на диференчните апроксимации (33) и (34) на дробното уравнение на дифузията (46) в правоъгълника $(x,t) \in [0,\pi] \times [0,1]$ със стъпка по пространството $h = \pi\tau/3$. Числени експерименти с различни стойности на h и τ потвърждават, че числените решения (33) и (34) са приближения на аналитичното решение на дробното уравнение на дифузията (46) с точност $O\left(\tau^{2-\alpha} + h^2\right)$ и $O\left(\tau^2 + h^2\right)$.

Заключение

В тази част разгледахме метод за подобряване на точността на числените решения на дробните уравнения на релаксация и дифузия с използване на дробните полиноми на Тейлър за решението. Числените екперименти показват, че точността на численото решение по времето се повишава от $O(\tau)$ до $O\left(\tau^{2-\alpha}\right)$. Построяването на числени решения на дробното уравнение на дифузията с висока точност е нетривиален въпрос. В [45] се предлага използване на неравномерни мрежи за намиране на числени решения на ДДУ.

Таблица 14: Максимална грешка и ред на числено решение (33) на уравнения (45) (ляво) и (46) (дясно), за $h = \pi\tau/3$ и $t = 1$.

τ	*Грешка*	*Ред*
0.025	0.00100782	1.04759
0.0125	0.00049480	1.02633
0.00625	0.00024489	1.01468
0.003125	0.00012175	1.00826

τ	*Грешка*	*Ред*
0.025	0.000078268	1.65812
0.0125	0.000024643	1.66722
0.00625	7.72×10^{-6}	1.67411
0.003125	2.41×10^{-6}	1.67940

Таблица 15: Максимална грешка и ред на числено решение(34) на уравнения (45) (ляво) и (46) (дясно), за $h = \pi\tau/3$ и $t = 1$.

τ	*Грешка*	*Ред*
0.025	0.000760933	1.04055
0.0125	0.000372634	1.03001
0.00625	0.000183395	1.02281
0.003125	0.000090563	1.01796

τ	*Грешка*	*Ред*
0.025	8.54×10^{-6}	1.90107
0.0125	2.22×10^{-6}	1.94430
0.00625	5.67×10^{-7}	1.96751
0.003125	1.44×10^{-7}	1.98068

Дробно уравнение на Блек-Шолс

Моделът на Блек-Шолс-Мертън е изведен през 1973 и предлага удобна формула за пресмятане на премиите по опциите. Уравнението на Блек-Шолс е основно уравнение във финансовата математика и е придобило широка употреба в практиката, като е изучавано задълбочено с числени и аналитични методи. Поради сложността на финансовите пазари, моделът преминава през множество модификации с цел подобряване на точността в зависимост от състоянието на пазара. Дробното уравнение на Блек-Шолс (ДУБШ) е параболично ДДУ в областта $(s,t) \in [0,S] \times [0,T]$

$$\frac{\partial^\alpha V}{\partial t^\alpha} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + (r-d)s\frac{\partial V}{\partial s} - rV = 0, \tag{47}$$

където σ е годишният волатилитет на цените на активите, r е безрисковият (фиксиран) лихвен процент, d е годишният дивидент, T е срока за падеж на опцията ($t = 0$ означава настоящия момент или "днес") и K е цената на упражняване на опцията. В дробния модел на Блек-Шолс стойността на опция, означена с $V = V(s,t)$, зависи като от моментното, така и от предхоните състояния на финансовите пазари и актива s, където t е времето до падежа на опцията. Дробният модел на Блек-Шолс се смята за по-точен от класическия модел, понеже отчита историята на стойностите на цената на опцията. С полагането

$$t := T - t, \quad W(s,t) := V(s,t) + \frac{K}{S}(s-S).$$

в уравнение (47) получаваме ДУБШ с хомогенни гранични условия

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^\alpha W}{\partial t^\alpha} = \dfrac{\sigma^2}{2}s^2\dfrac{\partial^2 W}{\partial s^2} + (r-d)s\dfrac{\partial W}{\partial s} - rW - \dfrac{dK}{S}s + rK, \\ W(0,t) = W(S,t) = 0,\ W(s,0) = W^*(s) = \max\{K-s,0\} + \dfrac{K}{S}(s-S). \end{cases}$$

Следните полагания водят до елиминиране на конвектния член:

$$U(s,t) = s^q W(s,t), \quad \text{където} \quad q = \frac{r-d}{\sigma^2}.$$

Функцията $U(S,t)$ е решение на дифузионното ДУБШ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^\alpha U}{\partial t^\alpha} = As^2 \dfrac{\partial^2 U}{\partial s^2} + BU + F(s,t), \\ U(0,t) = U(s,t) = 0,\ U(s,0) = U^*(s) = s^q \left(\max\{K-s,0\} + \dfrac{K}{S}(s-S) \right), \end{cases}$$

където

$$A = \frac{\sigma^2}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}\left(r + d + q^2\sigma^2\right), \quad F(s,t) = -s^q \left(\frac{dK}{S} s - rK \right).$$

Неравномерни мрежи по пространството се използват често във финансовата математика за числено решаване на частни диференциални уравнения, понеже водят до елиминиране на особеностите на началното условие и на решението при $s = 0$. Две важни неравномерни мрежи за приближено решаване на финансови задачи с помощта на диференчни схеми са квадратичната мрежа и мрежата на Тавела-Рандал.

- *Неравномерна мрежа на Тавела-Рандал $\mathcal{M}^{TR}_{\lambda,K}$ в интервала $[s^-, s^+]$:*

$$s_n = s^* + \lambda \sinh\left(c_1 \left(1 - \frac{n}{N}\right) + c_2 \frac{n}{N} \right), \qquad \text{където} \quad s^- < s^* < s^+,$$

$$c_1 = \sinh^{-1}\left(\frac{s^- - s^*}{\lambda} \right), \quad c_2 = \sinh^{-1}\left(\frac{s^+ - s^*}{\lambda} \right).$$

Параметърът λ определя "неравномерността" на мрежата.

- *Квадратична неравномерна мрежа $\mathcal{M}^Q$ в интервала $[s^-, s^+]$:*

$$s_n = s^- + \left(\frac{n}{N}\right)^2 \left(s^+ - s^-\right), \quad h_n = \left(\frac{2n+1}{N^2} \right) \left(s^+ - s^-\right).$$

Фигура 3: Графики на мрежата на Тавела-Рандал $\mathcal{M}_4^{TR}$ и квадратичната мрежа $\mathcal{M}^Q$ в интервала $[0, 40]$ за $K = 20$ и $N = 15$.

Мрежата на Тавела-Рандал и квадратичната мрежа на интервала $[0, S]$ се дефинират с помощта на функциите

$$\varphi_Q(x) = Sx^2, \quad \varphi_{\lambda,K}(x) = K + \lambda \sinh(cx + c_1),$$

където

$$c = \sinh^{-1}\left(\frac{S-K}{\lambda}\right) + \sinh^{-1}\left(\frac{K}{\lambda}\right), \quad c_1 = -\sinh^{-1}\left(\frac{K}{\lambda}\right).$$

В Глава 2 извеждаме триточковата апроксимация за втората производна на неравномерната мрежа дефинирана с функцията $\varphi(x)$,

$$d_n f''_{n-1} + f''_n + e_n f''_{n+1} = a_n f_{n-1} + b_n f_n + c_n f_{n+1} + E_n. \tag{48}$$

С формулата на Тейлър извеждаме формула за грешката E_n на (48)

$$E_n = \left(\frac{1}{6}\left(d_n h_{n-1}^3 - e_n h_n^3\right) + \frac{1}{120}\left(c_n h_n^5 - a_n h_{n-1}^5\right)\right) f_n^{(5)}.$$

Грешката E_n удовлетворява неравенството

$$|E_n| < \frac{1}{15}\left(\max_{x\in[0,1]} \varphi'(x)\right)^2 \left(\max_{x\in[0,1]} |\varphi''(x)|\right)\left(\max_{x\in[0,1]} \left|f^{(5)}(x)\right|\right) h^4.$$

В [70] построяваме триточкова компактна диференчна схема за дробното уравнение на Блек-Шолс, която използва L1 апроксимацията за производната на Капуто и триточковата апроксимация (48) за втората производна върху неравномерна мрежа. Когато решението на дробното уравнение на Блек-Шолс е двукратно гладка функция, точността на численото решение е $O\left(\tau^{2-\alpha} + h^4\right)$. На базата на числени експерименти и резултати от статии, можем да очакваме, че особеноста на решението при $t = 0$ води до точност на численото решение $O\left(\tau + h^4\right)$. Числените експерименти за реда на диференчната схема по времето и пространството за решение $U(s,t) = (1 + 2t + 3t^2)\sin(\pi s)$ (ляв стълб) и $\sigma = 0.1, r = 0.08, d = 0.025$ (десен стълб) са представени в Таблица 16 и Таблица 17. Графиките на числените решения на ДУБШ са дадени на Фигура 4.

Таблица 16: Ред на сходимост по времето и пространството на триточковата компактна диференчна схема за дифузионното ДУБШ на квадратичната неравномерна мрежа $\mathcal{G}^Q$ при $\alpha = 0.75$.

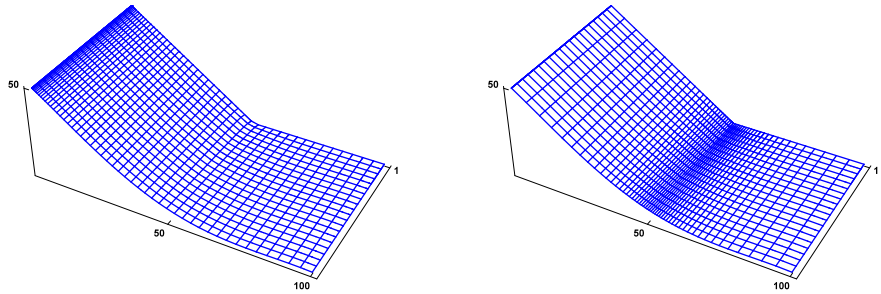
M	*Ред по* τ	*Ред по* τ
200	1.23764	1.06480
400	1.24169	1.05343
800	1.24532	1.04482
1600	1.24856	1.03796

N	*Ред по* h	*Ред по* h
200	4.00327	3.98584
400	4.00073	3.99621
800	4.00017	3.99904
1600	3.96748	3.99952

Таблица 17: Ред на сходимост по времето и пространството на триточковата компактна диференчна схема за дифузионното ДУБШ на мрежата на Тавела-Рандал $\mathcal{G}_6^{TR}$ при $\alpha = 0.9$.

M	*Ред по* τ	*Ред по* τ
200	1.10714	1.03668
400	1.10250	1.04803
800	1.10073	1.04516
1600	1.10016	1.03958

N	*Ред по* h	*Ред по* h
200	4.00461	3.98621
400	4.00085	3.99502
800	4.00027	3.99917
1600	4.00003	3.99972



Фигура 4: Числени решения ДУБШ за европейски пут опции на квадратичната мрежа $\mathcal{G}^Q$ при $\alpha = 0.75$ и на мрежата на Тавела-Рандал $\mathcal{G}_6^{TR}$ при $S = 100, K = 50, N = 50$ и $\alpha = 0.9$.

Библиография

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. Dover, New York; 1964.

[2] A. A. Alikhanov, A new difference scheme for the time fractional diffusion equation, 280 (2015), 424–438.

[3] F. Black, M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, Journal of Political Economy, 81 (1973), 637–659.

[4] J. Bodeau, G. Riboulet, T. Roncalli, Non uniform grids for PDE in finance, Lecture Notes, 2000.

[5] A. Cartea, D. del Castillo-Negrete, Fractional diffusion models of option prices in markets with jumps. Physica A, 374(2) (2007), 749–763.

[6] G. Chen, Mean value theorems for local fractional integrals on fractal space, Advances in Mechanical Engineering and its Applications, 1 (2012), 5–8.

[7] W. Chen, X. Xu, S. Zhu, Analytically pricing double barrier options based on a time-fractional Black-Scholes equation, Computers & Mathematics with Applications, 69(12) (2015), 1407–1419.

[8] M. Chen, W. Deng, WSLD operators II: the new fourth order difference approximations for space Riemann-Liouville derivative, arXiv:1306.5900 (2013).

[9] M. Chen, W. Deng, A second-order numerical method for two-dimensional two-sided space fractional convection diffusion equation, Applied Mathematical Modeling, 38(13) (2014), 3244–3259.

[10] M. Cui, Compact finite difference method for the fractional diffusion equation, Journal of Computational Physics, 228(20) (2009), 7792–7804.

[11] W.H. Deng, Short memory principle and a predictor-corrector approach for fractional differential equations. Journal of Computational and Applied Mathematics, 206(1) (2007), 174–188.

[12] W.H. Deng, Smoothness and stability of the solutions for nonlinear

fractional differential equations. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 72(2) (2010), 1768–1777.

[13] W. Deng, C. Li, Numerical schemes for fractional ordinary differential equations, In: Miidla, P. (ed.) Numerical Modeling. InTech, Rijeka (2012), 355–374.

[14] K. Diethelm, The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type. Springer; 2010.

[15] K. Diethelm, N. J. Ford, Numerical solution of the Bagley-Torvik equation, Bit Numerical Mathematics, 42(3) (2002), 490–507.

[16] H. Ding, C. Li, Numerical algorithms for the fractional diffusion-wave equation with reaction term, Abstract and Applied Analysis, (2013), Article ID 493406, 15 pages.

[17] H. Ding, C. Li, High-order algorithms for Riesz derivative and their applications (III), Fract. Calc. Appl. Anal., 19(1) (2016), 19–55.

[18] G. Gao, Z. Sun, Y. Zhang, A finite difference scheme for fractional sub-diffusion equations on an unbounded domain using artificial boundary conditions, Journal of Computational Physics, 231 (2012), 2865–2879.

[19] G. Gao, Z. Sun, H. Zhang, A new fractional numerical differentiation formula to approximate the Caputo fractional derivative and its applications, Journal of Computational Physics, 259 (2014), 33–50.

[20] G.-H. Gao, H.-W. Sun, Three-point combined compact difference schemes for time-fractional advection-diffusion equations with smooth solutions, Journal of Computational Physics, 298 (2015), 520–538.

[21] G.-H. Gao, H.-W. Sun, Z.-Z. Sun, Stability and convergence of finite difference schemes for a class of time-fractional sub-diffusion equations based on certain superconvergence, Journal of Computational Physics, 280 (2015), 510–528.

[22] R. Gorenflo, Fractional calculus: some numerical methods, CISM Lecture Notes (1996).

[23] M. Gülsu, Y. Öztürk, A. Anapalı, Numerical approach for solving fractional relaxation-oscillation equation, Applied Mathematical Modelling, 37(8) (2013), 5927–5937.

[24] H. Hejazi, T. Moroney, F. Liu, Stability and convergence of a finite volume method for the space fractional advection-dispersion equation, Journal of Computational and Applied Mathematics, 255 (2014), 684 – 697.

[25] M. Ishteva, Properties and applications of the Caputo fractional

operator, Master thesis, University of Karlsurhe (2005).
[26] C.-C. Ji, Z.-Z. Sun, A high-order compact finite difference scheme for the fractional sub-diffusion equation, Journal of Scientific Computing, (2015), 1–27.
[27] B. Jin, R. Lazarov, Z. Zhou, An analysis of the L1 scheme for the subdiffusion equation with nonsmooth data, IMA J Numer. Anal., 36(1) (2016), 197–221.
[28] B. Jin, R. Lazarov, Z. Zhou, Two fully discrete schemes for fractional diffusion and diffusion-wave equations, SIAM J. Sci. Comput., 38(1) (2016), A146–A170.
[29] C.H. Lubich, Discretized fractional calculus, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 17(3) (1986), 704–719.
[30] O. Kouba, Bernoulli polynomials and applications, Lecture Notes (2013).
[31] V. Lampret, The Euler-Maclaurin and Taylor formulas: Twin, elementary derivations, Mathematics Magazine, 74(2) (2001), 109–122.
[32] C. Li, A. Chen, J. Ye, Numerical approaches to fractional calculus and fractional ordinary differential equation, Journal of Computational Physics, 230(9) (2011), 3352 – 3368.
[33] C. Li, W. Deng, Y. Wu, Numerical analysis and physical simulations for the time fractional radial diffusion equation, Computers and Mathematics with Applications, 62 (2011), 1024–1037.
[34] C. Li, H. Ding, Higher order finite difference method for the reaction and anomalous-diffusion equation, Applied Mathematical Modeling 38 (2014) 3802–3821.
[35] C. Li, R. Wu, H. Ding, High-order approximation to Caputo derivatives and Caputo-type advection-diffusion equations, Communications in Applied and Industrial Mathematics, 6(2) (2015).
[36] J. Liang, J. Wang, W. Zhang, The solutions to a bi-fractional Black-Scholes-Merton differential equation, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 58(1) (2010), 99–112.
[37] R. Lin, F. Liu, Fractional high order methods for the nonlinear fractional ordinary differential equation, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 66(4) (2007), 856–869.
[38] Y. Lin, C. Xu, Finite difference/spectral approximations for the time-fractional diffusion equation, Journal of Computational Physics, 225 (2007), 1533–1552.
[39] F, Mainardi, Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena, Chaos, Solitons & Fractals, 7(9) (1996), 1461–1477.

[40] F. Mainardi, Fractional Calculus: Some basic problems in continuum and statistical mechanics, Fractals and fractional calculus in continuum mechanics (A. Carpinteri and F. Mainardi, editors), Springer, New York (1997), 291–348.

[41] O. Marom, E. Momoniat, A comparison of numerical solutions of fractional diffusion models in finance, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 140(6) (2009), 3435–3442.

[42] M.M. Meerschaert, C. Tadjeran, Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations, Applied Numerical Mathematics, 56(1) (2006), 80–90.

[43] K.S. Miller, B. Ross, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. John Wiley & Sons, New York; 1993.

[44] J. Murillo, S. Yuste, An explicit difference method for solving fractional diffusion and diffusion-wave equations in the Caputo form, J. Comput. Nonlinear Dynam., 6(2) (2010), 021014 – 021014-6.

[45] S.B. Yuste, J. Quintana-Murillo, A finite difference method with non-uniform timesteps for fractional diffusion equations, Computer Physics Communications, 182 (2012), 2594–2600.

[46] J. Quintana-Murillo, S.B. Yuste, A finite difference method with non-uniform timesteps for fractional diffusion and diffusion-wave equations, Eur. Phys. J. Special Topics, 222 (2013), 1987–1998.

[47] D. A. Murio, Implicit finite difference approximation for time fractional diffusion equations , Computers & Mathematics with Applications, 56(4) (2008), 1138–1145.

[48] S. I. Muslih, Om P. Agrawal, D. Baleanu, A fractional Schrödinger equation and its solution, International Journal of Theoretical Physics, 49(8) (2010), 1746–1752.

[49] [5] T. J. Osler, Taylor's series generalized for fractional derivatives and applications, SIAM J. Math. Anal., 2(1) (1971), 37–48.

[50] J. E. Pečarić, I. Perić, H. M. Srivastava, A family of the Cauchy type mean-value theorems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 306(2) (2005), 730–739.

[51] I. Podlubny, Fractional differential equations. Academic Press, San Diego; 1999.

[52] I. Podlubny, Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation, Fractional Calculus and Applied Analysis, 5(4) (2002), 367–386.

[53] T. Raia, S. P. Chakrabartya, The solutions to a bi-fractional

Black-Scholes-Merton differential equation, Journal of Interdisciplinary Mathematics, 16(2-03) (2013), 191–201.

[54] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, Fractional integrals and derivatives: Theory and applications. Gordon and Breach, London; 1993.

[55] A. Sidi, Euler-Maclaurin expansions for integrals with endpoint singularities: A new perspective. Numer. Math., 98 (2) (2004), 371–387.

[56] N. H. Sweilam, M. M. Rizk, M. M. Abou Hasan, Non-uniform finite difference method for european and american put option using Black-Scholes model, Journal of Fractional Calculus and Applications, 5(3S) No. 17 (2014), 1–11.

[57] C. Tadjeran, M. M. Meerschaert, H. P. Scheffer, A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation, Journal of Computational Physics, 213 (2006), 205–213.

[58] D. Tavella, C. Randall, Pricing financial instruments-the finite diference method, Wiley Series In Financial Engineering, John Wiley Sons, New York; 2000.

[59] W. Tian, H. Zhou, W. Deng, A class of second order difference approximations for solving space fractional diffusion equations, Math. Comp., 84 (2015), 1703–1727.

[60] J.J. Trujillo, M. Rivero, B. Bonilla, On a Riemann-Liouville generalized Taylor's formula, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 231(1) (1999), 255–265.

[61] S. Wang, A novel fitted finite volume method for the Black-Scholes equation governing option pricing, IMA J Numer Anal, 24(4) (2014), 699–720.

[62] S. Wang, S. Zhang, Z. Fang, A superconvergent fitted finite volume method for Black-Scholes Equations Governing European and American Option Valuation, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 31(4) (2015), 1190–1208.

[63] Y. Yan, K. Pal, N. J. Ford, Higher order numerical methods for solving fractional differential equations, BIT Numer Math 54(2) (2014), 555–584.

[64] F. Zeng, C. Li, F. Liu, I. Turner, The use of finite difference/element approaches for solving the time-fractional subdiffusion equation, SIAM J. Sci. Comput., 35(6) (2013), A2976–A3000.

[65] F. Zeng, C. Li, F. Liu, I. Turner, Numerical algorithms for time-fractional subdiffusion equation with second-order accuracy, SIAM Journal on Scientific Computing, 37(1) (2015), A55–A78.

[66] L. Zhao, W. Deng:, A series of high-order quasi-compact schemes for space fractional diffusion equations based on the superconvergent approximations for fractional derivatives, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 31(5) (2015), 1345–1381.

[67] H. Zhou, W. Tian, W. Deng, Quasi-compact finite difference schemes for space fractional diffusion equations, Journal of Scientific Computing, 56(1) (2013), 45–66.

[68] P. Zhuang, F. Liu, Implicit difference approximation for the time fractional diffusion equation, Journal of Applied Mathematics and Computing, 22(3) (2006), 87–99.

Публикации на автора свързани с темата на дисертацията

[69] Y. Dimitrov, Numerical Approximations for Fractional Differential Equations, Journal of Fractional Calculus and Applications, 5(3S), (2014), No. 22, 1–45.

[70] Y. Dimitrov, L. Vulkov. Three-point compact finite difference scheme on non-uniform meshes for the time-fractional Black-Scholes equation, AIP Conf. Proc. 1690, 040022 (2015).

[71] Y. Dimitrov, A second order approximation for the Caputo fractional derivative, Journal of Fractional Calculus and Applications, 7(2) (2016), 175–195.

[72] Y. Dimitrov, Three-point approximation for the Caputo fractional derivative, arXiv:1510.01619, Submitted for publication.